# Minimální důkaz teorému o čtyřech barvách 2016

Následující text přináší náčrt důkazu teorému o čtyřech barvách (T1) v tomto znění:

T1 Pro vybarvení polí libovolné politické mapy stačí nejvýše 4 barvy.

Pro důkaz musíme nejdříve ustavit pojmový aparát.

Politická mapa (dále jen mapa) se skládá z barevných polí, která se dotýkají (dotyk musí být lineární, ne bodový [2]), nebo nedotýkají. Mapu můžeme převést na graf, kde jednotlivá pole budou zastupovat uzly, dotyky pak hrany spojující odpovídající uzly, kterým budou udíleny barvy z $m$-četné množiny barev MB($m$) = ($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, ..., $x_m$), kde $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, ..., $x_m$ jsou konkrétní barvy A, B, C, D, … X. Jednotlivé uzly budou pořadě očíslovány přirozenými čísly 1, 2, …, $n$, kde $n$ je počet uzlů daného grafu. Pokud jsou dva uzly $r$, $s$ spojeny hranou, platí, že jim musí být udílením barev udělena různá barva, tj. je-li uzlu $r$ udělena barva $x$, u uzlu $s$ je vynucována barva $y$.

Potom můžeme dokazovaný teorém přeformulovat takto:

T2 V libovolném grafu mapy je vynucována nejvýše 4. barva.

Je zjevné, že počet vynucovaných barev závisí na počtu dotyků, tedy počtu hran. Pokud sestrojíme graf s větším počtem hran, měl by vynucovat více barev.

Potom můžeme dokazovaný teorém přeformulovat takto:

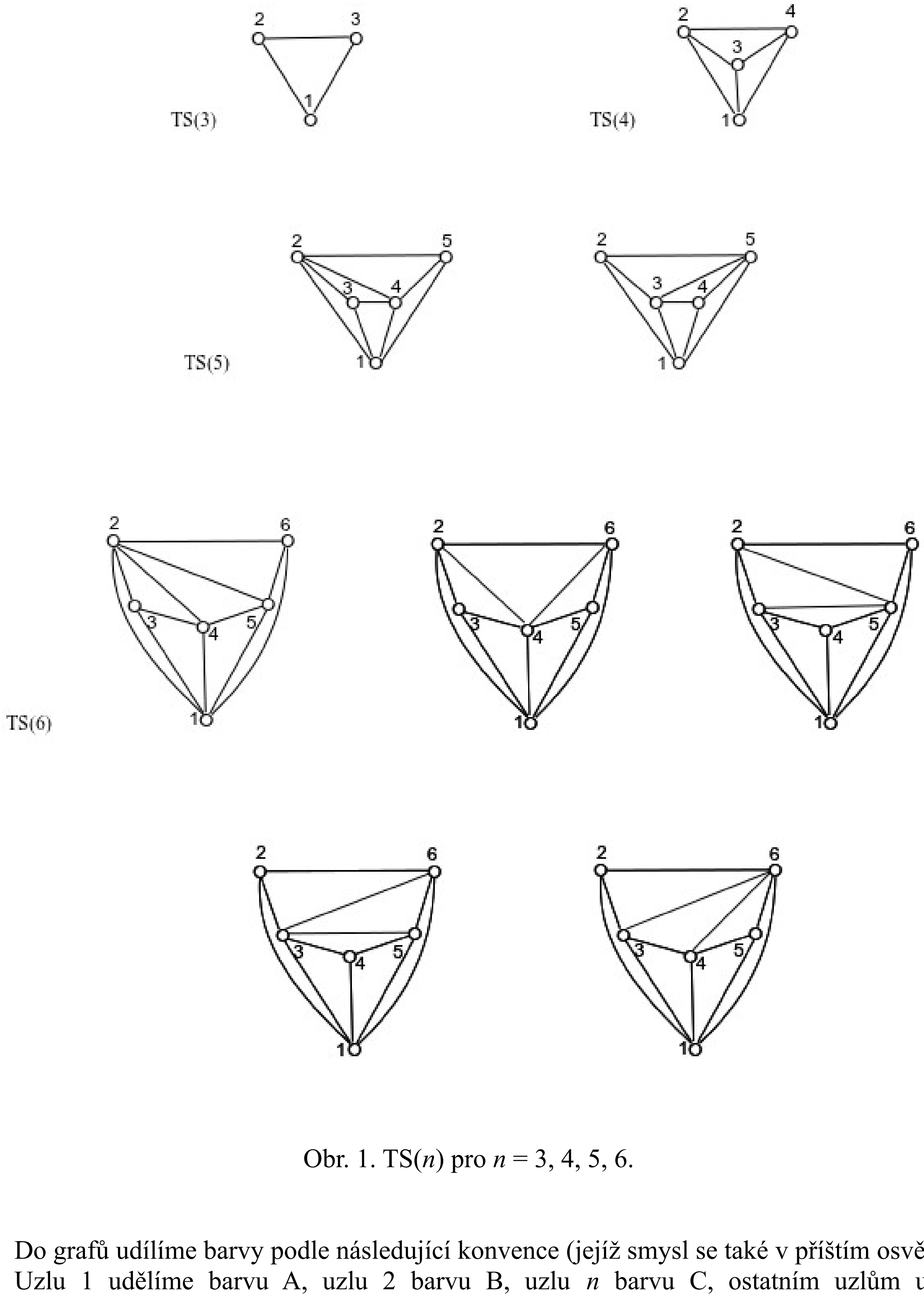
T3 Graf s maximálním počtem hran vynucuje nejvýše 4 barvy.

Graf s maximálním počtem hran je takový, do něhož nelze přidat další hranu. Nazveme jej trojúhelníková síť, TS($n$), kde $n$ je počet uzlů v ní obsažených, $n > 2$, a počet hran v ní $3(n-2)$. Je tvořena tzv. „trojúhelníky“, tedy elementárními útvary, jejichž 3 vrcholy tvoří 3 sousedící uzly, které jsou vzájemně spojeny 3 hranami (pro naše účely hrany nemusí být přímky).

Tato definice se opírá o konvenci zavedenou při konstrukci TS($n$) (její účelnost vyplyne z dalšího při kresbě grafu):

1. Nakreslíme do půlkruhu $n-1$ uzlů a očíslujeme je pořadě zleva přirozenými čísly 2, …, $n$. Pod půlkruh umístíme uzel s číslem 1.
2. Uzly spojujeme hranami následovně:
3. Uzel 1 spojíme se všemi zbývajícími uzly (v počtu $n-1$).
4. Uzel 2 spojíme s uzlem 3. Podobně pokračujeme u uzlu 3 (spojíme jej s uzlem 4), atd., až uzel $n-1$ spojíme s uzlem $n$. (Těchto hran bude $n-2$.)
5. Spojíme uzly 2, $n$. Vznikne kruh K(2-$n$) s uzly 2, …, $n$. V tomto kruhu doplňujeme hrany, dokud to jde (včetně spojnice 2-$n$ jich bude $n-3$). Vznikne útvar U(2-$n$). Tato úloha má více řešení. Nejdříve vedeme hrany vycházející z uzlu 2, potom následují řešení s východiskovým uzlem 3, atd., dokud nevyčerpáme všechny možnosti. (Počet hran v takto vzniklém TS($n$) bude roven $(n-1)+(n-2)+(n-3)$).

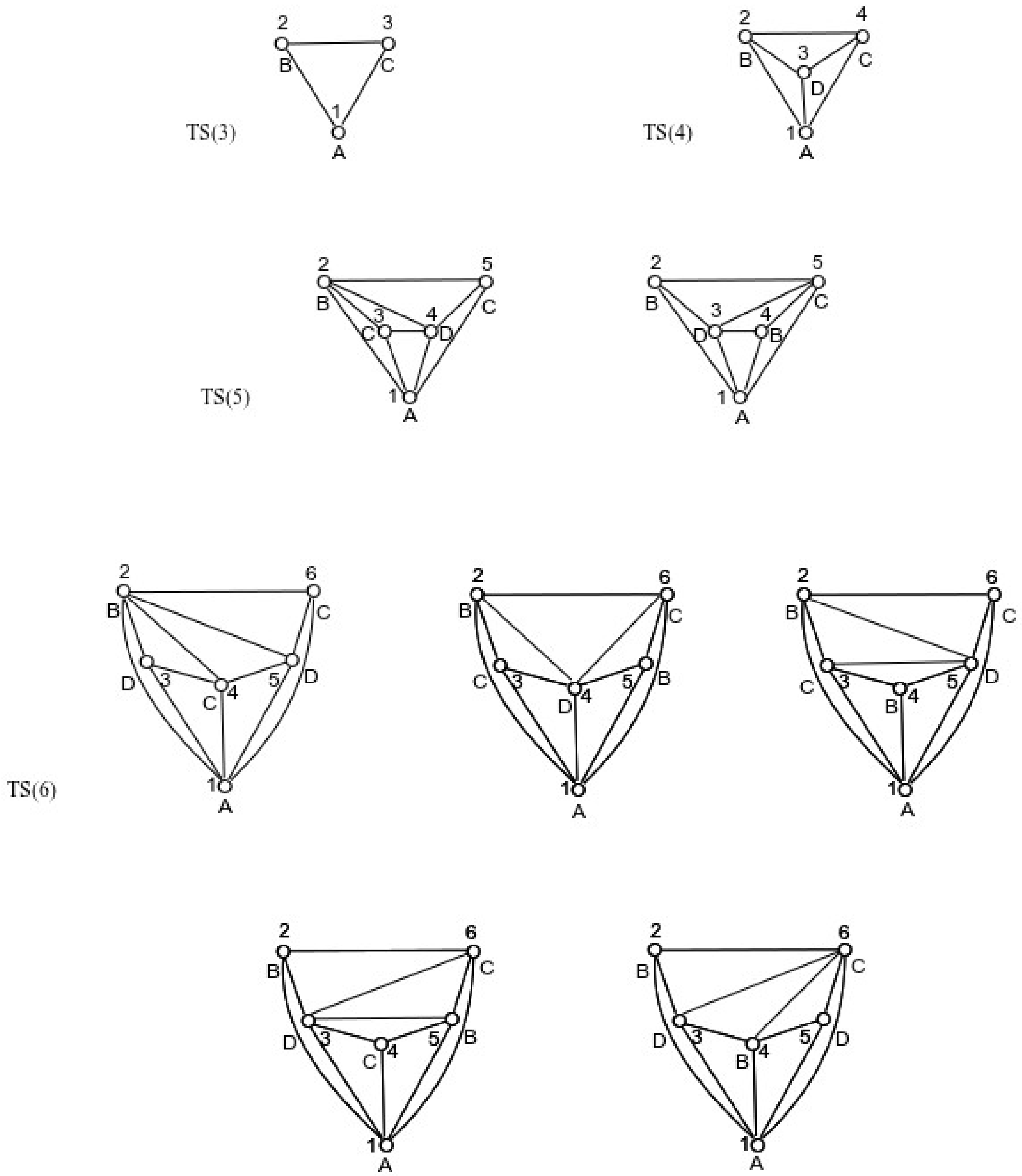
Abychom mohli zjistit chování TS($n$) při udílení barev, sestrojíme grafy TS(3) až TS(6):




Obr. 1. TS($n$) pro $n$ = 3, 4, 5, 6.

Do grafů udílíme barvy podle následující konvence (jejíž smysl se také v příštím osvětlí):
Uzlu 1 udělíme barvu A, uzlu 2 barvu B, uzlu $n$ barvu C, ostatním uzlům udělíme vynucovanou barvu, přičemž udílíme zbývající barvu z MB(3) = (B, C, D).

Udílení barev vypadá takto:




Obr. 2. TS($n$) pro $n$ = 3, 4, 5, 6 po udělení barev.

Na základě *Dílčího důkazu* níže je zřejmé, že útvar U(2-$n$) se skládá z „trojúhelníků“, které vynucují tři barvy, tj. maximální počet vynucovaných barev útvaru U(2-$n$) je MAX(U(2-$n$)) = 3. Protože pole 1 má čtvrtou barvu, A, MAX(TS($n$)) = 4.

V závislosti na tom můžeme dokazovaný teorém přeformulovat takto:

T4 Pro maximální počet vynucovaných barev MAX(TS($n$)) platí MAX(TS($n$)) = 4.

Z konstrukce TS($n$) plyne, že MAX(TS($n$)) = 4.
K vynucování 5. barvy takto nikdy nedojde.

Proto můžeme tvrdit, že platí T1.

**Příloha**

*Dílčí důkaz* teorému

TI Útvary U(2-$n$) vynucují nejvýše třetí barvu, tj. platí MAX(U(2-$n$)) = 3.

1. Chování obecné TS (tj. TS, která nemusí mít maximální počet hran) OTS($k$) vzniklé doplněním všech možných hran do kruhu K($k$) o $k$ uzlech, přirozené číslo $k > 3$

Pro dva sousedící „trojúhelníky“ v OTS($k$) platí, že mají totožnou hranu a 2 uzly, takže při udílení barev zbývající dva uzly mohou mít stejnou barvu.

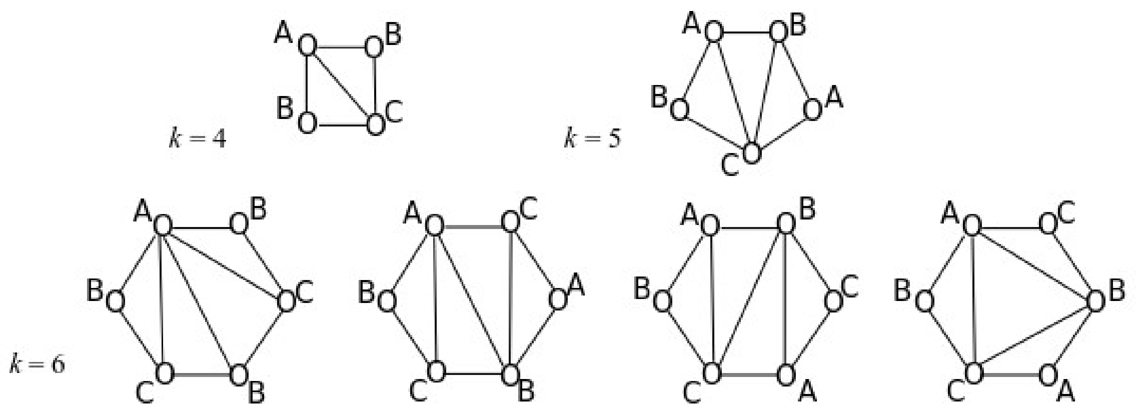
Proto můžeme při udílení barev postupovat takto:

Z množiny barev MB(3) = (A, B, C) udělíme tři různé barvy uzlům libovolného „trojúhelníka“.

Sousedícímu „trojúhelníku“ udělíme pro zbývající 3. uzel zbývající 3. barvu. Tento postup opakujeme tak dlouho, až jsou uděleny barvy všem uzlům.

Postup udílení barev z MB(3) zaručuje udělení barvy všem uzlům OTS($k$). Tím je dokázáno, že MAX(OTS($k$)) = 3.

2. U(2-$n$) je OTS($k$), kde $k + 1 = n$. Platí tedy pro U(2-$n$), že MAX(U(2-$n$)) = 3, čímž je dokázán teorém TI.




Obr. 3. OTS($k$) vzniklá z kruhu K($k$) pro $k$ = 4, 5, 6.
(Počet „trojúhelníků“ v OTS($k$) je roven $k$ – 2 (při $k$ o 1 vyšší pouze přibude 1 „trojúhelník“, takže způsob udílení barev se nemění).)

Prameny


[1] BOSÁK, J.: *Ako bol vyriešený problém štyroch farieb.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, *4* (1979), 181–201.

[2] KADEŘÁVEK, I. Ústní sdělení.


V Bílovicích nad Svitavou 12. února 2016